Christoph Kirfel

Spikerbrettet oppdaget på nytt

Spikerbrettet eller pluggbrettet er et hjelpemiddel som for mange av oss kanskje virker en smule barnslig. Men det viser seg faktisk at det ligger mange spennende oppdagelser i et slikt eksperimentutstyr. Spikerbrettet - noen kaller det for geoboard - har mange fordeler i forhold til andre måter å representere geometriske fenomener på. Bruker vi strikk til å lage figurer er det meget lett å forandre størrelse og form, noe som ville ha tatt lang tid om man skulle ha *tegnet* figurene om igjen. Omformingsprosesser blir også mer håndfaste når de kan utføres på spikerbrettet og gir en helt annen forståelse av det som foregår.
På spikerbrettet finnes det et hav av muligheter. Vi begrenser oss til noen få som lett lar seg utvide av hvem som helst. I tillegg til geometriske spørsmål kan vi også lage oppgaver fra kombinatorikken eller tallæren. Interesserte henvises til boken «Using Geoboards» (An ATM Activity book, Association of teachers of Mathematics, 7 Shaftsbury Street, Derby DE38YB, (1992)).

Vi lager et spikerbrett.

Her trenger vi følgende ingredienser.

- 1 treplate, ca. 35×35cm, 1 – 1,5cm tykk
- minst 25 spiker, 3 – 4cm lange
- 1 ruteark (A4)
- 20 strikker i forskjellige farger

Legg rutearket på treplaten og slå 5 rader med spiker i platen (4cm avstand). Slik får vi et kvadratisk rutenett med 25 spiker og 16 små kvadrater mellom spikrene. Ved hjelp av strikkene kan vi nå lage alle mulige slags geometriske figurer på spikerbrettet. Her kommer en del oppgaver som demonstrerer mangfoldet av muligheter og vanskelighetsgrader i arbeid med spikerbrettet.

Kommentar til læreren:

Oppgave 1 er ment som en slags innførings- eller oppvarmingsoppgave. Nye begreper kan introduseres her. Kjente begreper kan repeteres etter behov.

Oppgave 2, telefonleken, tar ofte litt tid. Det viser seg at elevene vanligvis på egen hånd oppdager koordinatsystemet. Noen bruker også sjakkbetegnelser for å orientere seg på spikerbrettet. Det kan være nyttig med følgende variant av oppgaven etter at koordinatsystemet er oppdaget: Prøv å formidle figuren din til naboen din uten å bruke tallord. Ord som «første», «andre», eller «to» og «tre» er nå forbudt. Elevene pleier å vise en stor oppfinnsomhet i å unngå å bruke tall. Her begynner de gjerne å ta geometriske begreper i bruk.

Oppgave 3 er mer vrien enn den kan se ut til. Kvadratene som ligger skjevt på brettet blir vanligvis oversett.

Oppgave 4. På spikerbrettet er det veldig lett å komme frem til oppdelinger av en n-kant som kan være til hjelp for å finne vinkelsummen. Starter man i et vilkårlig hjørne av n-kanten og trekker forbindelseslinjene til de resterende hjørnene, så får man en oppdeling av n-kanten i $n - 2$ trekanter. Denne oppdelingen gir oss også vinkelsummen.

Oppgave 5. Her er svaret 4 for et 3×3 brett. For større brett er oppgaven skikkelig vanskelig og en ordentlig utfordring for både lærer og elev.

Oppgave 6. Det som undersøkes her er Pascals trekant. Tallene i diagonalretning gir binomialkoeffisientene. Summerer man langs diagonalen får man en potens av to. Det blir helt naturlig når man bare ser på antall valgmuligheter skilpadden har for å komme til spikre på denne diagonalen.

Oppgave 7. Spikerbrettet egner seg fantastisk til innføring av og arbeid med arealbegrepet. Trekantarealet kommer veldig naturlig etter rektangelets areal. Da blir det også lett å lage seg en algoritme som forteller oss hvordan vi kan flytte strikken fra en spiker til en annen uten å forandre arealet. Samtidig kan vi se til at figurene blir enklere.

Oppgave 8. Arealer av figurer der hjørnene ikke ligger i spikerpunkter er adskillig vanskeligere å beregne. Men det går nok det óg. Det kan være lurt å utvide spikerbrettet (eller i hvert fall tenke seg spikerbrettet utvidet) til alle kanter med liknende strikkmønster også på utvidelsene. Her blir den intuitive løsningsstrategien som går ut over oppgaven (og lager den mer omfattende enn den opprinnelige) belønnet fremfor den analytiske metoden som går inn detaljene. Da kan det fort bli nokså rotete.

Oppgave 9. Her kan det være lurt å tenke seg at spikerbrettet hadde en «finere» inndeling. Finn først ut hvilken fininndeling vi må introdusere slik at skjæringspunktet faller sammen men en spiker fra den nye rutenetet. Så er det en enkel sak å finne arealet.

Oppgave 10. Oppgaven omhandler den såkalte «prixformelen». Som i oppgave 7 kan vi her tenke algoritmisk. Vi kan spørre hva som skjer hvis vi utvider figuren slik at i holdes konstant men u vokser med en enhet. Eller vi kan utvide figuren slik at i vokser med en mens u synker med en. Formelsammenhengen blir til slutt: $F = u/2 + i - 1$.

Oppgave 11. Arbeid med Pythagoras på spikerbrett kan være veldig verdifult. Det tunge og vanskelige ved setningen kan avdramatiseres. Det dreier seg ikke om noe annet enn relativt enkle arealbetrakninger som alle får til ved å dele opp figurer på en hensiktsmessig måte. Det vil lønne seg å dvele litt ved det faktum at vi får kvadratrøtter inn i bildet når vi spør etter sidelengden av kvadrater hvis areal er kjent.

Oppgaveark

Oppgave 1.

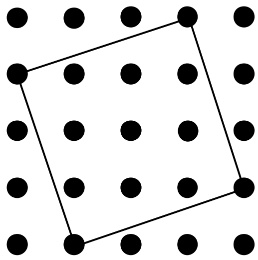
Bli kjent med spikerbrettet. Lag forskjellige figurer, rektangler, kvadrater, hus, stoler, rettvinklete, likebenete og muligens likesidete trekanter.

Oppgave 2.

To og to elever arbeider sammen. Hver trenger sitt eget spikerbrett. Den ene lager en strikkfigur på spikerbrettet sitt som han holder skjult for den andre. Så prøver han å formidle figuren til naboen med bare ord. Ingen får lov å se hos den andre. Man kan tenke seg at det foregår over telefon. Når naboens figur er ferdig blir figurene sammenliknet.

Oppgave 3.

Hvor mange forskjellige kvadrater kan en lage på spikerbrettet? Et slikt kvadrat skal være begrenset av **en** strikk. Det finnes flere enn du tror.



Bli først enig med deg selv om hva du legger i ordet «forskjellig». Her finnes det flere tolkninger. Hvor mange forskjellige rektangler kan du lage der den ene siden er dobbelt så lang som den andre? En rombe er en firkant med fire like lange sider. Klarer du å lage en rombe som ikke er et kvadrat? Forresten, når du teller kvadrater? Husket du å få med kvadratet fra tegningen?

Oppgave 4.

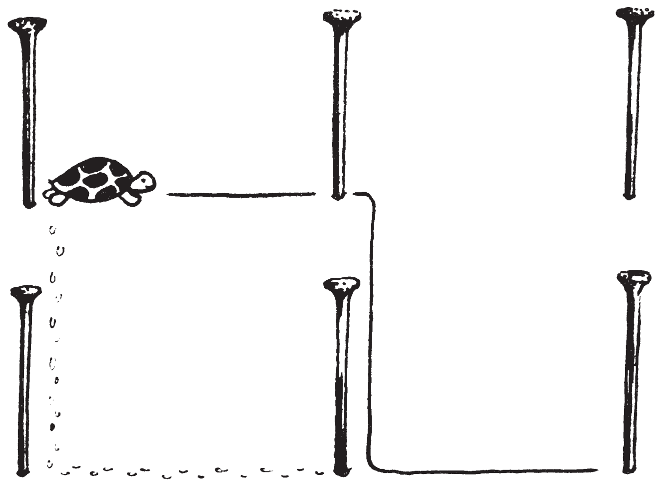
I en trekant er vinkelsummen 180 grader, i en firkant 360 grader. Hvordan er det for en fem-, seks-, syv- eller n-kant? Mål vinkelsummen og lag deg en liten tabell. Har du en mistanke? Del en vikårlig n-kant inn i trekanter. Noen oppdelinger forteller deg mer enn andre. Vis at n-kanten alltid kan deles i n – 2 trekanter. Prøv å utnytte dette til å bekrefte din mistanke.

n-kant	Vinkelsum i grader
3-kant	180
4-kant	360
5-kant	
6-kant	
7-kant	
8-kant	
9-kant	
10-kant	

Oppgave 5.

Med rette linjer skal alle spikrene på et 3x3 spikerbrett forbindes. Hvor mange linjer trenger vi minst? Man skal kunne vandre langs hele forbindelsesstrekningen i et trekk. Hvordan er det med 4x4 spikerbrett? Enn et 5x5 spikerbrett?

Oppgave 6.

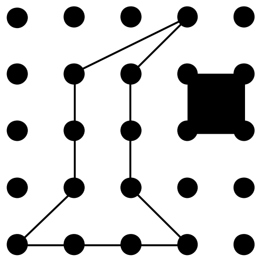


En liten skilpadde starter i øverste hjørne til venstre på spikerbrettet. Hun har bare lov å bevege seg enten ett hakk til høyre eller ett hakk nedover om gangen på spikerbrettet. Når hun så kommer til en ny spiker har hun igjen to valgmuligheter

(ett hakk til høyre eller nedover). På denne måten kan hun i prinsippet nå alle spikre på brettet.
Noen spiker fører det mange veier til noen er det bare **en** vei til. Skriv ned antall skillpaddeveier som fører til hver spiker. Kjenner du igjen tallene. Prøv å utvikle en enkel og sikker måte å beregne disse tallene på ved å se på nabospikre.

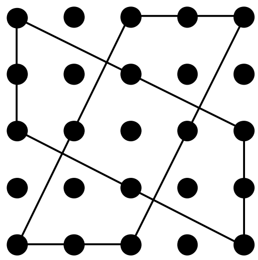
Oppgave 7.

Lag et par kvadrater og rektangler og finn arealet av disse målt i forhold til *grunnkvadratet* mellom fire nabospiker. Undersøk nå trekanter. Prøv å finne en enkel forklaring for at trakantarealet er gitt ved halvparten av produktet av grunnsiden og høyden, $F = g \cdot h / 2$.



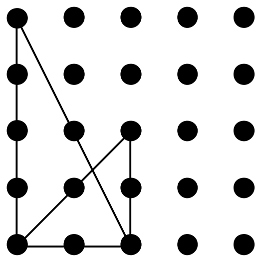
Finn arealet av andre mer kompliserte figurer. Ofte kan du flytte strikken fra en spiker til en annen uten at arealet forandrer seg. Prøv å bruke denne metoden til å lage enklere figurer, der arealet er lett å beregne. Hvilke typer tall dukker opp som areal for våre figurer? Kan du få et areal på 5,33333333? Hvorfor ikke?

Oppgave 8.



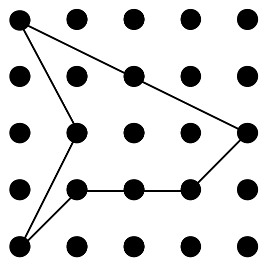
Vi plasserer **to** strikker som på tegningen ved siden av. Linjene skjærer hverandrer i fire punkter som ikke faller sammen med spikrene våre. Skjæringspunktene danner et kvadrat. Hvorfor? Kan du finne arealet til dette kvadratet?

Oppgave 9.



Figurer der strikken krysser seg selv er også litt mer krevende enn figurer der strikken ikke har lov til det. Finn arealet av trekanten ABC, der C er det punktet der strikken krysser seg selv.
Hva betyr det for arealet av figurer der vi tillater strikken å krysse seg selv i forhold til figurer der dette ikke skjer.

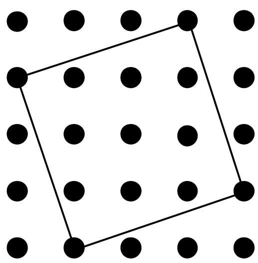
Oppgave 10.



En strikkfigur på spikerbrettet har *u* spikre på randen – strikken er borti disse spikrene – og *i* spikre i det indre. Vi prøver nå å finne en sammenheng mellom *u, i* og flateinnholdet, *F*, til figuren. Lag en liten tabell over forskjellige figurer. Finn *u, i* og arealet *F*, og prøv å gjette deg frem til en sammenheng. Kan du overbevise andre om at det må være slik?
Her ligger 8 spikre på figurens rand, altså $u = 8$. Tre spikre ligger i det indre, $i = 3$. Arealet er her seks, altså $F = 6$.

Oppgave 11.

På spikerbrettet kan vi også arbeide med Pythagoras. Finn først arealet av kvadratet nedenfor ved å se på hele 4 ganger 4 kvadratet (hele spikerbrettet) og de overskytende trekantene i hvert hjørne.



Når du har funnet arealet, hvor lang er siden i kvadratet? Kan vi bruke dette resultatet til å bekrefte Pythagoras læresetning. Finn den passende rettvinklete trekanten og formuler Pythagoras læresetning for denne. Lag andre situasjoner der Pythagoras kan overprøves ved hjelp av enkle arealbetraktninger.