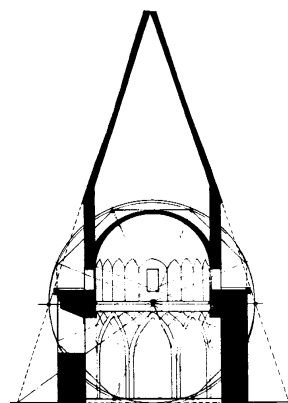


## 5.4 Den estetiske dimensjonen

I et brev til sin elskerinne, Sophie Volland, skriver redaktøren av Encyclopedi, Denis Diderot (1713–1774):

«Michelangelo søker etter hvilken form han skal gi kuppelen i St. Peterskirken i Rom, en av de vakreste formene noen kan velge.» Diderot viser til at den franske geometrikeren, La Hire, fant at Michelangelo ut fra alle sine utkast valgte det som både var mest bærekraftig og vakrest. Diderot spør: «Hvordan kan det ha seg at Michelangelo valgte den løsningen som også matematikeren kom til var den beste?»<sup>6</sup>



Figur 5.16

Den som vil slappe av med trivillitteratur samtidig som en ønsker et historisk glimt om bruk av matematikk, kan ta for seg Ken Follets *Stormenes tid I og II*. Disse bøkene handler mye om funderingene til murmestrene som bygget katedraler på 1100-tallet.

Når matematikken blir trukket frem i en debatt om estetikk blir ofte det gylne snitt brukt som et eksempel. Det gylne snitt er et helt bestemt forhold mellom to tall f.eks. lengde og bredde av et rektangel. Undersøkelser har vist at vi mennesker visuelt foretrekker linjestykker som står i nettopp dette forholdet. Vi synes det er pent eller vakkert.

Hva er det gylne snitt? Vi sier at forholdet mellom to linjestykker representerer det gylne snitt hvis det største forholder seg til det minste, på samme måte som summen av begge to forholder seg til det største. I litteraturen kalles det største ofte for major,  $M$ , og det minste for minor,  $m$ . Vi kaller linjestykkene for  $a$  og  $b$ . Da får vi

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}, \text{ eller } a^2 = ab + b^2.$$

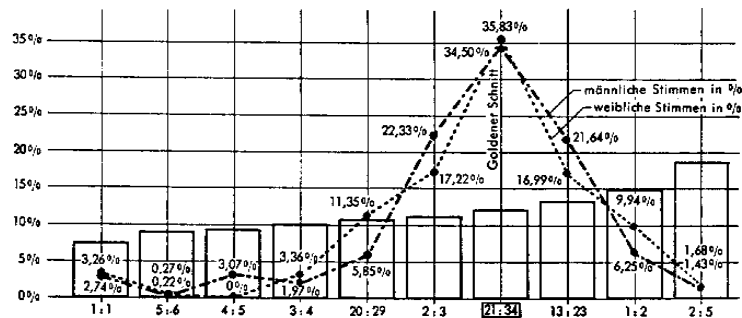
Setter vi  $b=1$  får vi  $a^2 = a + 1$  eller  $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Den positive løsningen  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$ , er det gylne snitt. Rent tallmessig har dette forholdet mange interessante egenskaper. Desimalutviklingen av tallene  $a$  og  $1/a$  likner veldig på hverandre. Sifrene bak kommaet er de samme for begge tallene. Vis dette.

<sup>6</sup> Kilden er tidsskriftet *Dialoger*, nr 13/1989.

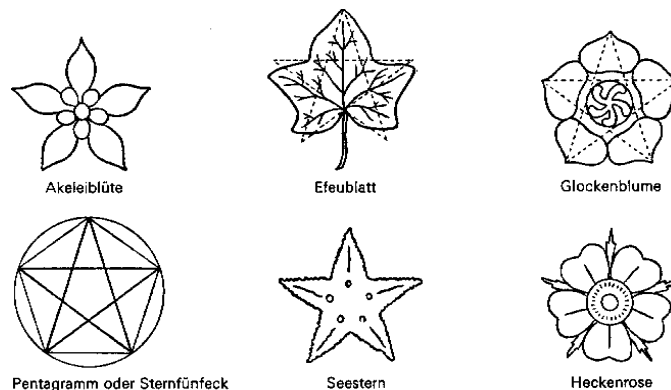
Nedenfor skal vi prøve å konstruere linjestykker som har nett-opp dette forholdet.

Først skal vi se på resultatet av en undersøkelse der folk ble spurt hvilket rektangel de likte best f.eks. når de skulle velge en billedramme (figur 5.17). For både menn og kvinner var resultatet det samme. Det forholdet som liknet mest på det gyldne snitt skåret høyest.



Figur 5.17

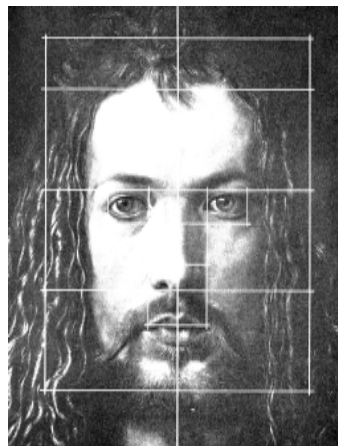
Ikke bare synes mange mennesker at det gyldne snitt er vakkert, men dette forholdet dukker også opp i naturen i veldig mange sammenhenger. Som vi skal se i oppgavene nedenfor, dukker det gyldne snitt opp i forbindelse med den regulære femkanten. I naturen finnes mange planter og dyr som har grunnstruktur som en regelmessig femkant. Da er det ikke så rart at det gyldne snitt viser seg mange steder når vi begynner å måle lengder og størrelser på disse organismene (figur 5.18 er hentet fra boka *Der Goldene Schnitt*)



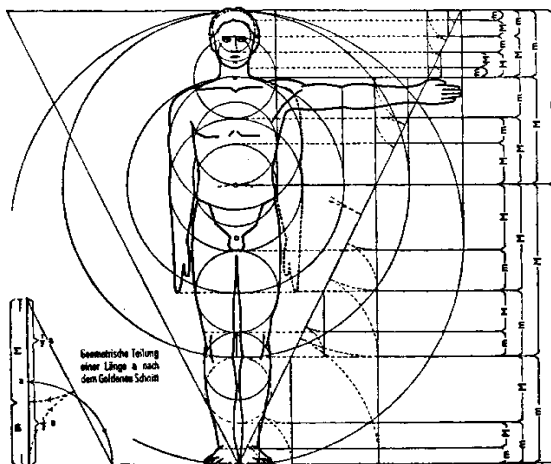
Figur 5.18

Mer overraskende er det kanskje at det gylne snitt også dukker opp når vi begynner å sammenlikne sentrale størrelser ved menneskekroppen eller menneskets ansikt.

Kunstneren Albrecht Dürer på 1500-tallet foretok utallige slike målinger på menneskeansikter og fant det gylne snitt mange steder. Utfra dette laget han bilder og portretter der han benyttet seg av funnene om hvordan proporsjonene i menneskets ansikt skulle være. På denne måten entret det gylne snittet også kunsten.

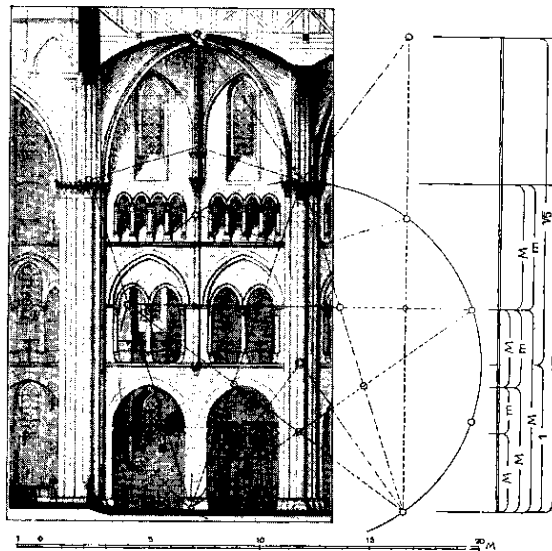


Figur 5.19: Albrecht Dürer «Selvportrett», Gamle Pinakothek, München

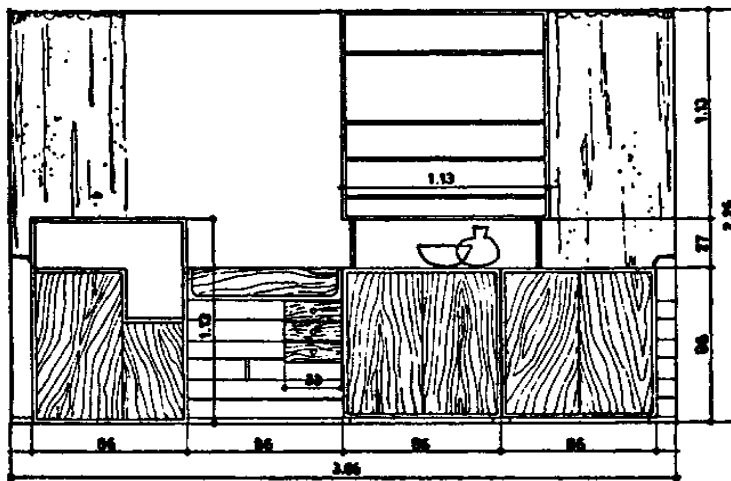


Figur 5.20

Allerede grekerne brukte det gylne snitt som viktig strukturelement i både tempelarkitektur og i plastisk kunst. Gjennom hele arkitekturhistorien i middelalderen, i renessansen og helt frem til moderne tid, beholdt det gylne snitt en sentral posisjon. I moderne tid kan den franske arkitekten Le Corbusier nevnes, han utnyttet konsekvent det gylne snitt i sine bygninger, ja til og med i møbeldesign. (Se figurene 5.21 og 5.22)



Figur 5.21: Limburger Dom

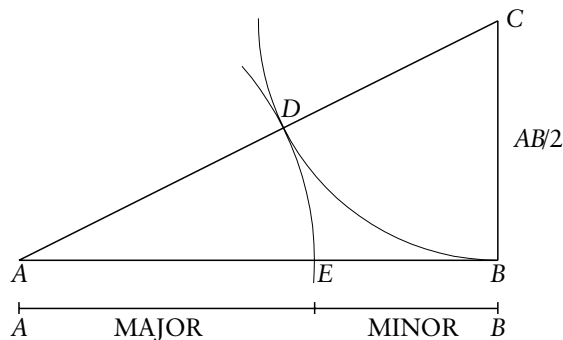


Figur 5.22: Le Corbusier, møbeldesign

### Oppgave 5.10

Vi starter med et vilkårlig linjestykke  $AB$  og ønsker å dele det opp i to deler slik at forholdet mellom dem blir det gyldne snitt. Vi kon-

struerer en rettinklet trekant  $ABC$  der vinkelen ved  $B$  er rett, og  $BC$  er halvparten så lang som  $AB$ . Vi slår nå en sirkelbue om  $C$  med radius  $BC=AB/2$  og finner skjæringspunktet  $D$  på  $AC$ . Vi slår en ny sirkelbue om  $A$  med radius  $AD$  og finner skjæringspunktet  $E$  med  $AB$ . Da er forholdet mellom  $AE$  og  $EB$  det gylne snitt. Vis dette!



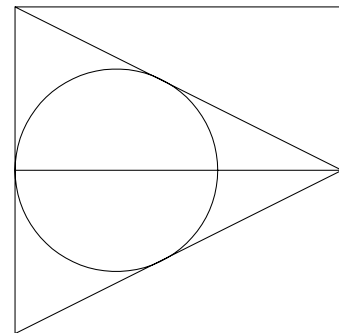
Figur 5.23

### Oppgave 5.11

Vis at forholdet mellom kvadratsiden og diameteren i sirkelen i tegningen ved siden av er det gylne snitt.

Sett bokstaver på punktene, beregn diagonalen i «halvkvadratet». Finn avstanden fra kvadrathjørnet til berøringspunktet ved hjelp av symmetriargumenter. Bruk gjerne Pythagoras' setning.

Hvordan vil du gå frem for å konstruere figuren med kvadratet, trekanten og sirkelen? Husk at sirkelen er innskrevet i trekanten.



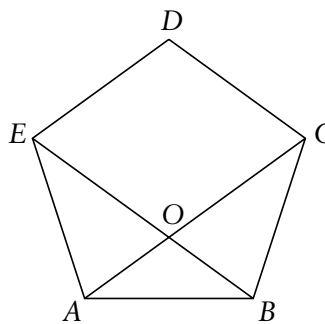
Figur 5.24

### Oppgave 5.12

Nedenfor ser du en regulær femkant.

- Prøv å dele opp femkanten i trekanter og finn vinkelsummen i femkanten.
- Beregn vinkelen i hjørnet  $A$ .
- Trekk diagonalen og finn vinkelen som diagonalen danner med en side.
- Trekk to diagonaler ut fra samme hjørne. Hvor stor er den mellomliggende vinkelen?

- e) Trekk diagonalene  $AC$  og  $BE$ . Skjæringspunktet kaller vi  $O$ . Hva kan vi si om trekanten  $OBC$ ?
- f) Trekanten  $ABO$  kan igjen utvides til en regulær femkant. Forklar hvorfor. Den nye femkanten er formlik med den opprinnelige. Vi setter  $s$  som symbol på sidelengden i den opprinnelige femkanten og  $d$  som symbol på diagonallengden i den opprinnelige femkanten.



Figur 5.25

$$\text{Vis at } \frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}.$$

Vis at forholdet mellom diagonal og side i en regulær femkant er lik det gyldne snitt.

### Oppgave 5.13 Fibonaccitall

Tallfølgen  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  er kjent som *Fibonaccitall*.

- Finn det neste tallet i rekken. Finn en formel som beskriver hvordan det  $n$ -te leddet i følgen kan beregnes.
- Lag et regneark som beregner de første 20 leddene i følgen. Beregn også forholdet (kvotienten) mellom to påfølgende ledd i følgen og studer hvordan dette forholdet utvikler seg.
- Vi antar nå at det er vist at forholdet mellom to påfølgende Fibonaccitall ikke endrer seg når vi kommer langt nok ut i rekken. Kall forholdet for  $g$  og vis at  $g = 1/g + 1$ . Vis nå at forholdet er lik det gyldne snitt.