

# 5 Geometri i kultur og samfunn

## 5.1 Den stereotype geometriundervisningen – bakgrunn

Det kan synes som et paradoks at et av matematikkens mest spennende og varierte emneområder, geometrien, håndteres så ensformig som det gjøres i skolen. Et annet paradoks er at geometrien med sin vektlegging på det visuelle, og med de store mulighetene for brobygging mellom elevenes erfaringer og matematikken, faktisk har fått en redusert betydning gjennom de siste tiårene. Her håper vi at L97 som på mange måter prøver å «rehabiliterer» geometrien, vil kunne snu utviklingen.

Begge paradoksene kan forklares historisk. Det ensformige ligger i innflytelsen fra antikken, spesielt, Pythagoras, Euklid og Platon. Utviklingen av geometri som vitenskap knyttes nemlig historisk sett til Hellas i perioden 500 f. Kr. til 300 e. Kr. I England kalles skolegeometrien fortsatt for «Euclid» mange steder.

Riktignok kjenner man også fra andre kulturer resultater som går på geometri, arealformler osv, men det spesielle med grekernes angrepsvinkel er koblingen mellom geometri og filosofi. Geometrien utvikler seg til et mønstereksempel på hvordan man kan finne fram til sannheten. Høydepunktet i denne utviklingen er Platon som flere steder tar den geometriske bevismetoden til inntekt for hvordan en kommer frem til ekte sannhet om ideverdenen som er hans filosofiske prosjekt. Grekerne undersøkte punkter, linjer og sirkler som idealiserte objekter, ikke som reelle gjenstander fra dagliglivet. På denne måten liknet disse geometriske objektene på Platons ideer som heller ikke var konkrete, men på et vis sto bak de reelle objektene. Ekte sannhet var ikke å finne i den konkrete verdenen, men bare i ideverdenen. Gjennom utdanningen, spesielt ved hjelp av matematikken (geometrien), skulle de mannlige elevene komme så nær som mulig de evige sannheter. Kunnskap var altså noe mer enn det en hadde bruk for i det praktiske livet: «Bare ved å utvikle den rene kunnskapen kunne individene komme bak de forestillinger som den materielle verden tvang på dem. Med nødvendighet måtte da utdanningens innhold organiseres slik at dette ble mulig.» (Lundgren, 1979, side 25)

Slik ble geometriske setninger og formler en illustrasjon for Platons ideverden og sannhetssøken. Platons idelære har hatt en

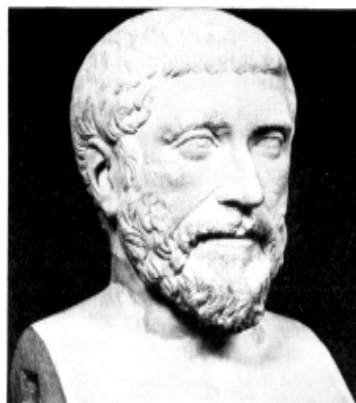
enorm inflytelse på hele kulturlivet i vår vestlige verden. Dermed fikk også geometrien en spesiell status som trening i resonnement innenfor en ideverden. På denne måten ble faget en del av standarden for klassisk kunnskap, og ferdighet i faget en del av et dannelsesideal.

Faget overtok også de klassiske redskapene som passer og linjal som hovedarbeidsredskaper selv om fremskrittet i teknologien gjorde disse til antikverte museumsgjenstander.

Matematikkoppgavene skulle ikke som i det gamle Babylonia gi matematikeren mulighet til å briljere med kjente metoder på mer eller mindre fantastiske problemstillinger. I stedet var de motivert ut fra matematikken selv ikke ut fra praktiske nyttehensyn. Deres interesse gjaldt problemstillinger som den «rene» matematikken åpnet for. Var det f. eks. mulig å konstruere en regulær femkant med passer og linjal? Hva med syvkanten? De såkalte «rene» konstruksjonsoppgavene, det vil si de konstruksjonene som skal utføres bare ved hjelp av passer og linjal, er eksempler på oppgaver som har røtter i antikkens matematikk.

Slik overtok faget også en klassisk standard av oppgavetyper, konstruksjonsoppgavene. Allerede grekerne fant frem til en rekke slike konstruksjonsoppgaver som ingen klarte å løse. Disse klassiske problemene, vinkelens tredeling, kubens fordobling og sirkelens kvadratur ble dermed en enorm inspirasjon for ettertidens matematikkgenerasjoner, igjen en grunn for å vedlikeholde og utvikle den klassiske geometrien. Det tok rundt 2000 år før disse problemene fikk sin endelige løsning. Det ble vist at ingen av de tre ønskede konstruksjonene kunne gjennomføres med passer og linjal, en tanke som for grekerne hadde vært umulig å tenke.

Platon stod i Pythagoras' tradisjon. Pythagoras som levde i det 6. århundre f.Kr. hadde grunnlagt en «matematisk orden» i Crotona i Sør-Italia der grekerne hadde opprettet en liten koloni. Her ble matematikk dyrket som en slags religion med ritualer og hemmelighetskremmeri. Pythagoreerne satte orden og harmoni i sentrum for utdanning. Matematikk ble et fremstående kunnskapsområde, fordi en her kunne beskrive orden både i musikk og natur. «Gud har ordnet kosmos – universet – etter tall. Harmonien er guddommelig og består i tall-



Figur 5.1: Pythagoras

forhold. Den som lærer å utgrunne denne tallharmoni, blir selv guddommelig og udødelig» hevdet Pythagoreerne.

Mottoet for ordensfelleskapet var «Alt er tall». Pythagoras hadde oppdaget at deler man en svingende streng i to, så hører man oktaven klinge. Deler man den i tre, så får man kvinten. Alle de harmoniske toneintervallene fremkom ved enkle delingsforhold med hele tall. På bakgrunn av denne observasjonen bygget Pythagoras sin filosofi om tallenes ordnende kraft i hele universet. Ikke bare musikken, men hele verdensaltet var strukturert etter dette enkle prinsippet: de hele tallene.

Det ble et stort sjokk for Pythagoreerne når det ble klart at dette prinsippet ikke var holdbart, og at det ikke engang kunne beskrive forhold i geometrien. I Pythagoras' orden ble det nemlig oppdaget at diagonalen og siden i et kvadrat ikke kan beskrives som et forhold av hele tall. Denne oppdagelsen ble først hemmeligholdt siden den undergrov ordenes grunnprinsipp, men siden slapp denne kunnskapen ut til omverdenen. Over tid førte dette til at ordenen mistet betydning og gikk i oppløsning. Dette må vel kalles for den første krisen i matematikkens vitenskapshistorie. En effekt av denne krisen var at tallæren som ble dyrket så uforbeholdent av Pythagoreerne, ble forlatt til fordel for geometrien. Siden tallæren ikke viste seg å være sterk nok til å beskrive forholdene i geometrien, måtte det være en mangel ved denne, og geometrien var altså sterkere i sin forklaringskraft. Her ligger noe av bakgrunnen for hvorfor antikkens matematikere ble så opptatt av geometrifaget.

Euclid sto i Platons tradisjon. Det han først og fremst gjorde var at han gav de geometriske kunnskapene som var kjent i hans miljø en logisk og helhetlig, en såkalt aksiomatisk fremstilling. Metoden går ut på at han presenterte noen få grunnsetninger om geometriske objekter som punkter og linjer som hverken blir forklart eller bevist. Disse setningene kalles aksiomer. Utra disse utledet han nå alle kjente resultater innen geometrien på en systematisk måte der alle kunnskaper ble utledet kun ved hjelp av logiske slutningsregler fra tidligere setninger. De aller første setningene, aksiomene, ble ikke bevist eller utledet. Disse ble akseptert som apriori-sanne. Et av aksiomene lyder: Gjennom to punkter går det nøyaktig en linje. Slike enkle setninger var direkte innlysende og trengte ingen forklaring, mens mer kompliserte setninger om trekanter eller sirkler skulle tilbakeføres til slike enkle grunnsetninger. Se også kapittel 3.1.

Verket heter *Elementer* og bestod i alt av 13 bøker. Disse bøkene fungerte både som lærebøker og paradigmeskapere (trendsettere) for datidens og ettertidens matematikkundervisning og matematikkforskning. Den aksiomatiske metoden har hatt enorm innvirkning på hele utviklingen i matematikken. På 1800-tallet ble det klart at metoden også kunne overføres til andre områder innen matematik-

ken, og dette gav faget en enorm impuls og fostret mange spennende resultater. Begrensningen ved metoden ble først synlig i vårt århundre da matematikeren Kurt Gödel viste at det i de aller fleste aksiomsystemer kan formuleres setninger som er sanne uten at de kan utledes av aksiomene.

Euklid skrev sitt omfattende verk på Museet i Aleksandria ved Nilens munning i det gamle Egypt. Dette lærestedet utviklet seg som et kraftsenter for matematisk forskning og undervisning i epokens siste periode.<sup>1</sup>

*Elementer* ble oversatt til Latin rundt året 500. Den danske kunnskapsarkeologen Jens Højrup peker på at verket ble skole-dannende for den institusjonaliserte matematikkundervisningen.<sup>2</sup>

Vi har nevnt passer- og linjalkonstruksjonene som et eksempel. Andre eksempler er vektleggingen av setninger av typen «samsvarende vinkler mellom paralleller er like store» og kongruenssetningene (som forteller oss når to trekanter er kongruente altså helt like), som har direkte tilknytning til Euklids geometri. Vi kan konkludere med at den geometriundervisningen som har røtter i Euklids *Elementer* er

- idealisert og uten praktisk betydning
- preget av logiske slutningsregler
- konsentrert om avgrensede oppgaver.

Vi har enda ikke sagt noe om hvordan geometriundervisning kan være variert og kreativ. Men ser vi et øyeblikk for oss fiskeren som navigerer uten tekniske hjelpemidler, tømmeren som utvikler kompliserte takkonstruksjoner, eller kvinnen som vever de mest kompliserte mønstre, så forstår vi kanskje at den passer- og linjal-orienterte geometrien som vi kjenner fra skolen, er en svært ensformig og begrenset geometri.

Det andre paradokset som ble nevnt ovenfor om den reduserte betydningen av geometri i skolen, kan tilbakeføres til reformene med matematikkundervisning som ble gjennomført på 50-60-tallet. Enkelte vil kjenne disse reformene under navnet «moderne matematikk». På denne tiden vektla trendsetterne blant matematikerne arbeidet med strukturelementet i matematikken. De arbeidet på et høyt abstraksjonsnivå. Matematikerne kunne finne felles formele-

---

1 De siste matematikere som er kjent med navn fra denne epoken er Theon av Aleksandria og hans datter Hypathia. Hypathia ble drept av romerne i år 418. Det omfattende bibliotek i Aleksandria ble på samme tid brent i kristendommens navn. Museet ble stengt av keiser Justinian i år 529 etter å ha eksistert i nesten 1000 år. I vår tid diskuteres om ikke arabisk og afrikansk kultur hadde større innflytelse over antikkens Hellas enn hva vi regner med. Historikeren Martin Bernal gir en omfattende dokumentasjon av dette, bl. a. ved hjelp av historiske kilder i boken *Black Athena*, Free Academic Press.

2 Jens Højrup ved Roskilde Universitetscenter har skrevet en rekke tekster om den organiserte matematikkundervisningens tidligste historie. F.eks. artikkelen Sub-Scientific Mathematics, i *History of Science*, vol 28 (79).

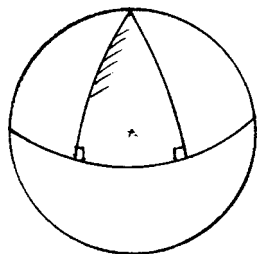
menter i forskjellige matematiske emner, og de isolerte disse og beskrev dem som strukturer. Ved hjelp av koordinatsystem kunne de f.eks. algebraisere geometrien. Det anskuelige arbeidet med geometriske former og kurver, ble redusert til ren bokstavregning. De av leserne som har 3MN, kjenner eksemplet med vektorregning, som nettopp kan oppfattes som en algebraisering av geometrien.

Mange av de matematikerne som arbeidet som trendsettere på denne måten, deltok i arbeidet med matematikkreformene på 50–60-tallet. De så naturlig nok på den konkrete, visuelle geometrien som et kunnskapsstoff som stod i motsetning til en fremtidsrettet matematikkundervisning. Den mest kjente av dem, franskmannen Jean Dieudonné, stod i første linje blant disse med oppropet «Død over geometrien».

Den nye læreplanen, L97, har på mange måter innsett at denne reformiveren på 50- og 60-tallet hadde bivirkninger som gjorde større skade enn nytte. Derfor har geometrien fått en mer sentral plass i skolen, og tidligere standardelementer i faget som konstruksjon med passer og linjal er betydelig nedtonet. Den estetiske dimensjonen og skapergledden har endelig fått lov å komme inn i geometrien. Læreren står friere med hensyn til utvalg av stoff til undervisningen og blir oppmuntret til å knytte verden rundt til faget. Det konkrete aspektet, det synlige og håndterbare ved geometrien blir ikke lenger foraktet, men tvert imot hilst velkommen og utnyttet til å gi ny innsikt i samspill med abstrakt resonnering. Lærerens oppgave blir nå å skape en variert og spennende geometriundervisning i grunnskolen.

### Geometri – jordmåling

Allerede betydningen av ordet *geometri* viser hvordan vi blir lurt av den euklidske geometrien. Geometri betyr jordmåling. Som kjent er jorda kuleformet. I den euklidske geometrien vektlegger vi begreper som rette linjer og plan. Men hva er en rett linje på jordoverflaten? og hva er et plan? For ikke å snakke om, hva er en vinkel og hva er parallelle linjer på en kule?



Figur 5.2

Se på denne figuren:

Det er tegnet inn en trekant på kulen. Vi ser at ved ekvator er det tegnet to normaler. Ved ekvator vil disse linjene bli oppfattet som parallelle linjer. Likevel ser vi at de sannsynligvis kommer til å møte hverandre på polene. I trekanten har vi to rette vinkler (ved ekvator) samt en vinkel ved polen. Vinkelsummen er altså større enn  $180^\circ$ .

Straks vi tar steget ut fra det euklidske planet og eksempelvis tar utgangspunkt i

geometri på en kule, finner vi interessante og overraskende resultater.

Matematikeren er avhengig av forenklinger. Utfra disse utvikler han sine matematiske modeller. Det er ved hjelp av forenklete modeller av virkeligheten at matematikeren kan gjøre beregninger, komme med prognoser og vurderinger, og gjøre nytte for seg i samfunnet. Euklids geometri er nyttig når det gjelder å beregne areal av hustomter og av stuegulv. Men straks en skal måle strekninger som er lengre enn 1000 m dukker det opp problemer. Landmåleren som idag bruker måleinstrumenter som måler med stor nøyaktighet, vet dette. Når hun bruker kikkerten tvers over en vanlig norsk fjordarm, så ser hun ikke fjøresteinene på den andre siden. Så spørres det da hvor stor nøyaktighet hun har bruk for.<sup>3</sup>

Matematikerne har forlenget innsett at de ikke kommer så langt avsted med geometrien dersom de bare skulle forenkle slik Euklid gjorde det. Derfor har de utviklet såkalte ikke-euklidske geometrier. Kulegeometri, eller sfærisk geometri, er et eksempel på en slik ikke-euklidsk geometri.

Den sfæriske geometrien ble utviklet først og fremst i forbindelse med navigasjon på havet. Fra atlas i geografifaget kjenner vi problemet med å overføre kulen til et plan. Noe mister en alltid ved denne overføringen. Enten deformeres flateinnhold og form på landområder, eller så forandrer avstander eller retninger seg. Når Mercators kartprojeksjon fikk slik stor betydning som den fikk, skyldtes det at den ivaretok retninger, noe som var nødvendig når en skulle navigere etter kartene. Denne projeksjonen deformerte bl.a. kontinentenes størrelse slik at landområdene på den sørlige halvkulen ble mindre enn hva de er i forhold til områdene på den nordlige halvkulen. Liknende problemer kom arkitekter, ingeniører og malere bort i da de skulle overføre det de så i rommet til et ark papir. Den såkalte projektive geometrien ble utviklet av representanter for disse yrkesgruppene på 14–1500-tallet. Leonardo da Vinci stod i forgrunnen for denne utviklingen. I hans store maleri *Nattverden* spiller perspektivpunktene en viktig rolle i den helhetlige utformingen

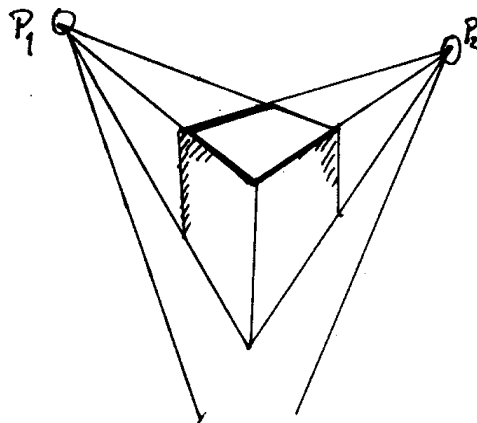
### Fra projektiv geometri

Parallele linjer skjærer hverandre i et punkt. Dette punktet ligger uendelig langt borte. Samlingen av alle slike punkter ligger på en uendelig lang, rett linje. Denne linjen utgjør horisonten. Matematikere skiller mellom geometrier der horisonten er med i planet og der den ikke regnes med. Igjen ser vi at det kan være hensiktsmessig at det finnes geometrier der parallelle linjer skjærer hverandre.

---

<sup>3</sup> Kjartan Tvetes geometrimateriell *Geometri – jordmåling – 11 tverrfaglige temaer*, Caspar Forlag, gjengir en avisdiskusjon om krumningen på Mjøsa i dette perspektivet. Det er nesten ikke til å tro, men høydeforskjellen er ca. 280 meter.

Det er ikke tilfeldig at matematikken, og med den geometrien, utviklet seg raskt fra 14–1500-tallet av. Vi har nevnt behovene til arkitekter og ingeniører. Vi kunne ha nevnt navigasjon i forbindelse med de store oppdagelsesreisene. Vi skal heller ikke glemme at i dette tidsrommet, ble grunnlaget for opplysningstiden lagt. Menneskene frigjorde seg gradvis fra autoritetenes åk, det ble etterhvert lov for enkeltmennesket å tenke selv. Det ble derfor lettere å rive seg løs fra de autoritære og undertrykkende rammene som fantes rundt matematikken og slik sette erfaringene og fornuften i forgrunnen når en utviklet ny matematikk.



Figur 5.3