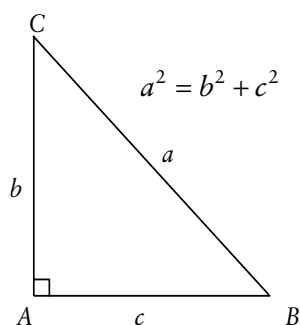


3.7 Pythagoras på mange måter

Grekeren Pythagoras ble født på Samos 569 og døde ca. år 500 f. Kr. Setningen som har fått hans navn ser ut til å ha vært kjent lenge før hans fødsel. Setningen gjelder for en rettvinklet trekant og er følgende:



Kvadratet av lengden av den lengste siden (*hypotenusen*) er lik summen av kvadratet av de to korteste sidene (*katetene*).

Figur 3.26

Det kan være vanskelig å oppfatte innholdet i setningen. Vanskeligheten ser ut til å ligge i hva kvadratene står for; nemlig som arealet av kvadrater med a , b og c som sidekanter eller som kvadrattall. Det er også slik at svært få hele tall gjør at setningen er riktig.

Det er mange forskjellige bevis for setningen. Her er noen:

1. Ved å sette arealet av hele kvadratet lik summen av de 4 like store trekantene og det lille kvadratet får vi:

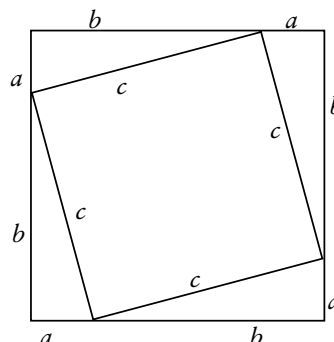
$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

som gir

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

og

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Figur 3.27

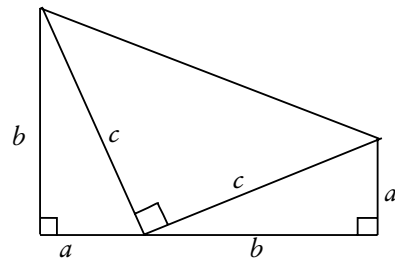
2.

Den tidligere amerikanske presidenten Garfield ga også et bevis for setningen:

Figuren kan betraktes som tre trekanter eller et trapes. Ved å sette arealet av trapeset lik summen av arealene av de tre trekantene får vi:

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

som også gir $a^2 + b^2 = c^2$.

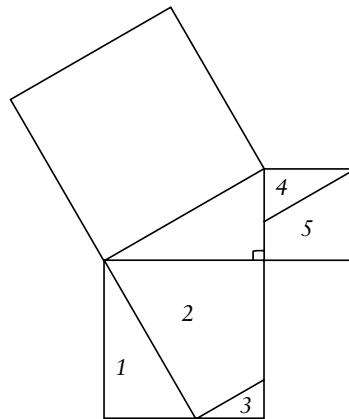


Figur 3.28

3. Puslespill

Klipp ut de 5 nummererte bitene. Legg disse bitene som et puslespill slik at de akkurat dekker det store kvadratet.

Til diskusjon: Det er vanlig å innføre Pythagoras' setning på ungdomstrinnet. På hvilke alders-trinn kan puslespillet brukes?



Figur 3.29

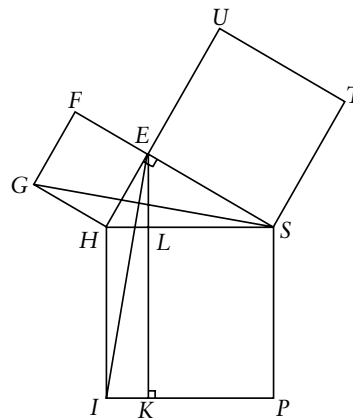
3. Euklids figur som bevis for setningen

Trekantene HSE og HLE er formlike. Derfor (etter mellomproporsjonalsetningen, side 69) er:

$$\frac{HL}{HE} = \frac{HE}{HS}$$

som gir: $HE^2 = HL \cdot HS$.

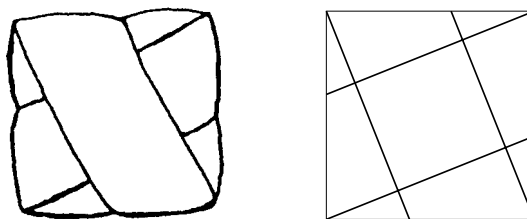
Dette betyr at $HIKL$ og $HEFG$ har samme areal. På tilsvarende måte kan det vises at $KPSL$ og $ESTU$ har samme areal. Dette viser setningen.



Figur 3.30

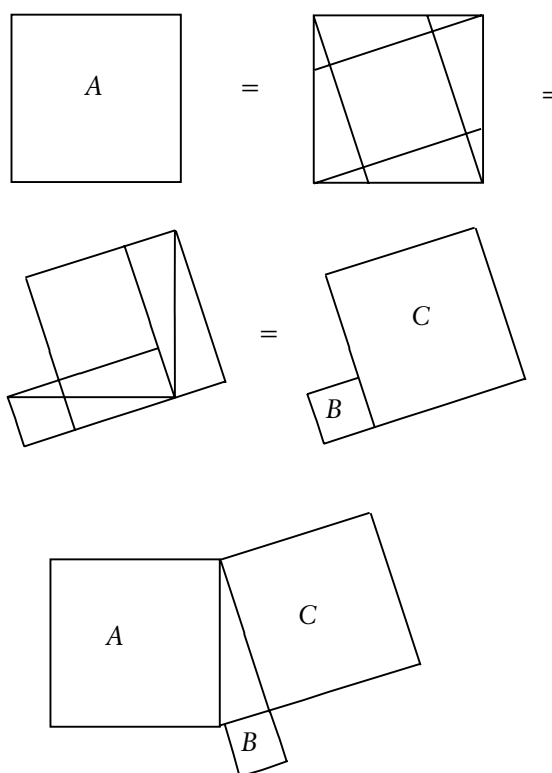
5. Paulus Gerdes, Mozambique.

Paulus Gerdes viser hvordan man kan se gyldigheten av Pythagoras' setning ved å ta utgangspunkt i knapper som er vevet av bønder i Mozambique. Det er en tegning av knappen til venstre under. Ved å rette ut noen linjer, får vi tegningen til høyre.



Figur 3.31

Arealet av hele knappen kan settes lik arealet av en omformet «knappe».



Figur 3.32

Ved å se på arealene av kvadratene, blir

$$\text{kvadratet } A = \text{kvadratet } B + \text{kvadratet } C.$$

Et Pythagoreisk talltrippel, er tre (hele) tall a , b og c som passer inn i likningen $a^2 + b^2 = c^2$.

Et eksempel på et slikt talltrippel er: $a=3$, $b=4$ og $c=5$. Et annet talltrippel som passer er 6, 8 og 10. Disse tallene kalles snekkertriplet fordi de kan brukes for å sjekke om en vinkel er rett, f. eks. i et hjørne eller liknende.

Oppgave 3.19

Finn flere Pythagoreiske talltripler.

Oppgave 3.20

Et berømt problem fra matematikkens historie er «det brukkete bambusproblemet», som stammer fra eldre kinesisk matematikk:

En bambusstokk er 10 chih høy. Stokken brykker, og toppen av stokken rører bakken 3 chih fra foten av stammen. Hvor høyt oppe på stammen er bruddet?

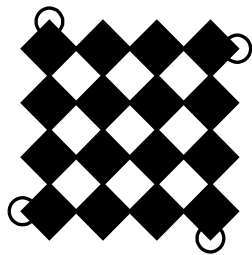


Figur 3.33

Oppgave 3.21

Under er det et mønster. Det finnes ofte som mønster på gensere, tepper osv. Hvor har dere sett det?

Hvor mange sorte ruter er det? De sorte rutene kan settes sammen til et kvadrat. Hvor lang er en side i kvadratet?



Figur 3.34

Hvor mange hvite ruter er det? De hvite rutene kan også settes sammen til et kvadrat. Hva er sidelengden i dette kvadratet?

Bruk linjal og trekk opp linjer mellom hjørnene som er ringet inn. Du får et kvadrat. Diskuter hvorfor flateinnholdet av dette kvadratet er likt flateinnholdet av hele mønsteret.

Bruk rutene i mønsteret til å tegne en trekant som har rett vinkel og sider lik 3, 4 og 5 ruter.

Prøv å tegne opp et liknende mønster som har 25 sorte ruter og 16 hvite ruter. Still liknende spørsmål som det vi gjorde over. Hva blir svarene nå?

Utforsk videre; lag nye mønstre og still nye spørsmål!

Oppgave 3.22

(fra eksamen i grunnskolen 1986)

- Konstruer en trekant ABD der $AB=6,0$ cm, AD er 9,5 cm og $\angle ABD=90^\circ$.
- Hvor stor er BD ?
- Trekant ABD er en del av en firkant $ABCD$ der $CD=BC$ og $\angle ABC=135^\circ$. Konstruer firkanten.
- Hvor stort er arealet av firkanten?
- Konstruer en sirkel med sentrum O på BD og slik at den berører (tangerer) AD i E . Radian er 3,0 cm.
- Bevis at $\triangle ABD$ og $\triangle OED$ er likeformede (formlike).
- Beregn OD .
- Hvor stor er diagonalen AC ?

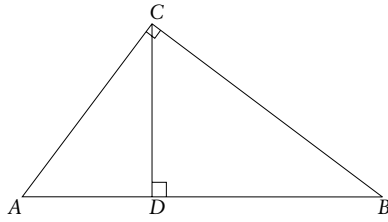
Oppgave 3.23

(fra eksamen i grunnskolen 1987)

- Konstruer trekanten ABD der $AB=12$ cm, $AD=6$ cm og $\angle DAB=60^\circ$.
- Hvor store er vinklene i trekanten ABD ?
- Regn ut lengden BD .
- Normalen fra D på AB skjærer AB i E . Konstruer normalen.
- Forklar at $\triangle AED$ er likeformet (ensformet, formlik) med $\triangle ADB$.
- Trekanten ABD er en del av firkanten $ABCD$. C ligger like langt fra B som fra D , og på parallellen til AB gjennom D . Konstruer firkanten.
- Regn ut vinklene i trekanten BCD .
- Regn ut omkretsen av firkanten $ABCD$.
- Konstruer en sirkel som omskriver firkanten $ABCD$.
- En del av sirkelen ligger utenfor firkanten. Regn ut arealet av denne delen.

Mellomproporsjonalen

Gitt en rettvinklet trekant ABC , med C som den rette vinkelen. Høyden fra C treffer AB i D .



Figur 3.35

Hvorfor er trekantene ABC , DBC og ADC formlike? På grunn av formlikhet har vi $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$ eller $CD^2 = AD \cdot DB$.
 CD kalles *mellomproporsjonalen* mellom AD og DB .

I avsnittet om konstruksjoner (3.2) står det nevnt at mellomproporsjonalen kan brukes til å konstruere kvadratroten av et linjestykke. Hvis $AD=a$ og $DB=1$, vil $CD^2 = AD \cdot DB = a \cdot 1 = a$.

Dette betyr at $CD = \sqrt{a}$.

Figuren over kan også benyttes til å vise Pythagoras' læresetning.

Pga. formlikhet er $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Siden $AB=AD+DB$, gir

dette: $BC^2 = AB \cdot (AB - AD) = AB^2 - AB \cdot AD$. Settes $AB \cdot AD = AC^2$ inn i uttrykket over, gir dette: $BC^2 = AB^2 - AC^2$ eller:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

Oppgave 3.24

Mellomproporsjonalen kan også brukes til å konstruere lengden av kvadratrøtter på en annen måte. Hvis f. eks. $CD = \sqrt{6}$, da er $CD^2 = 6 = 2 \cdot 3$. Du kan nå konstruere trekant ABC når $AD=2$ og $DB=3$.

Konstruer på tilsvarende måte: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{12}$ osv.

Oppgave 3.25

En eske er 5,0 cm lang, 3,0 cm bred og 1,0 cm høy. En nål skal legges i esken.

- Hvor lang kan nålen være hvis den skal legges i bunnen av esken?
- Hvor lang kan nålen være hvis den kan legges diagonalt i esken

fra nederst i det ene hjørnet til øverst i motsatt hjørne?

Oppgave 3.26

(fra eksamen i grunnskolen 1995)

- a) Konstruer en trekant ABC der $AB=5,0$ cm, $\angle A=90^\circ$ og $BC = 8,0$ cm.
- b) Regn ut AC .

Trekant ABC er en del av en firkant $ABCD$ der $\angle ACB=\angle CAD$ og $\angle D=90^\circ$.

- c) Konstruer ferdig firkant $ABCD$.
- d) Skriv forklaring til konstruksjonen av firkant $ABCD$.
- e) Vis at trekant ABC er formlik med trekant DCA .
- f) Regn ut AD .
- g) Forklar hvorfor firkant $ABCD$ er et trapes.

Punktet E ligger på forlengelsen av AC slik at arealet av trekant DCE er lik arealet av trekant ADC .

- h) Finn punktet E og forklar hvordan du tenkte for å finne punktet. Marker punkt E på konstruksjonen.

Oppgave 3. 27

Diskuter hvilke kunnskaper i geometri det blir spurt etter i oppgaven foran.

—ooOOoo—

I kapittel 5 er det flere oppgaver der mye av dette stoffet kommer til anvendelse.

